Interpolação

Laura Goulart

UESB

21 de Março de 2016

O que é interpolação?

Para aproximar uma função por uma mais simples existem duas classes de métodos, e a distinção entre elas está em considerarmos, ou não, a existência de erros de dados. No primeiro caso, consideramos que os dados são precisos e portanto pode-se exigir que o gráfico da função de aproximação passe pelos pontos dados. Resolvemos problemas deste tipo usando interpolação.
No segundo grupo, levamos em consideração possíveis erros introduzidos na obtenção de dados. Precisamos, então, efetuar um outro processo chamado de ajustamento de curvas, que tenta eliminar alguns erros e no qual se destaca o *Método dos Mínimos Quadrados*.

Primeira situação onde precisamos interpolar

Quando são conhecido somente valores numéricos da função para um conjunto finito de pontos e é necessário calcular a função em um ponto não tabelado.

Exemplo

Uma fábrica despeja dejetos no leito de um rio, onde a cada hora se buscou fazer uma coleta de amostra. Após muitas tentativas, apenas quatro sucessos tiveram que estão indicados pela tabela abaixo:

Hora	*Quantidade de poluentes(kg)*
8:00	*2*
10:00	*3*
13:00	*4*
17:00	*1*

Qual é a estimativa de poluente às 16:00?

Busca-se extrair dos dados alguma indicação sobre a função que descreve a taxa de mudança na quantidade de poluentes ao longo do dia. Como estimar o que se deseja dos dados observados?

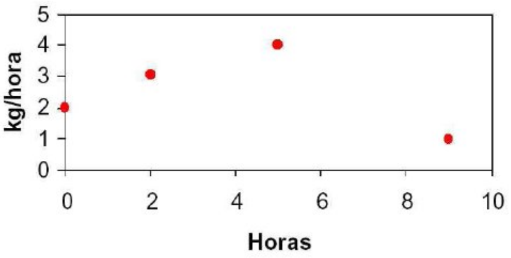

Figura: Diagrama de Dispersão

(1ª Tentativa) Preencher as lacunas nos dados, admitindo-se que os valores de uma medida são constantes até a seguinte.

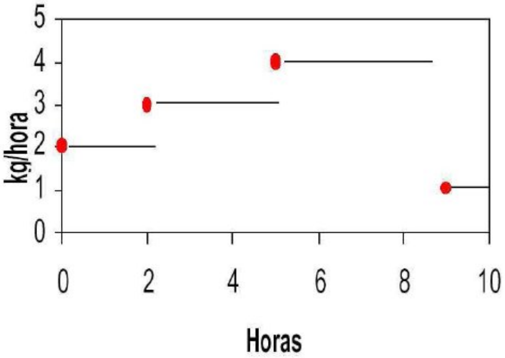

Figura: Função Escada

(2ª Tentativa) Admitindo que há variações entre os valores coletados, interligando-os por retas.

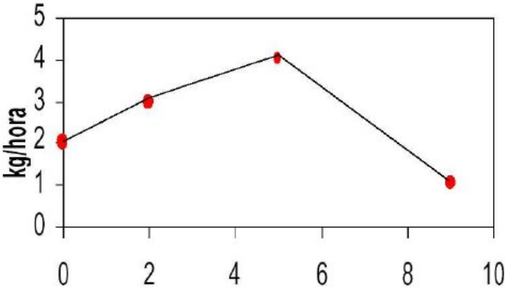

Figura: Função não derivável

(3ª Tentativa) Ligando os pontos através de uma curva suave.

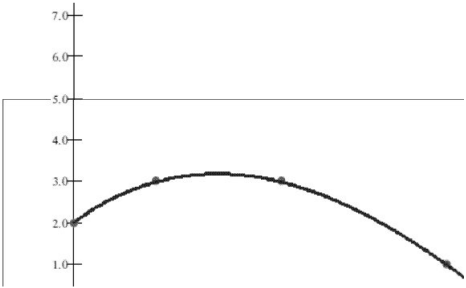

Figura: Função derivável

Outra situação onde precisamos interpolar

Quando a função em estudo tem uma expressão difícil(ou mesmo impossível) de calcular a integral definida.

Exemplo

$\int_0^1 e^{x^2}\, dx$

Interpolação Polinomial

Consideremos os (n+1) pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de um intervalo [a,b]. Consideremos uma função f(x) e procuramos aproximar f(x) por uma função mais simples que pode ser de tipos variados, tais como: exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e etc... Neste capítulo serão estudadas as funções polinomiais.
Seja $p_n(x) = a_1x^n + \ldots + a_1x + a_0$ chamado de <u>polinômio interpolador</u> tal que $p_n(x_i) = f(x_i); \forall i = 0, 1, \ldots, n.$

Gráfico da interpolação polinomial

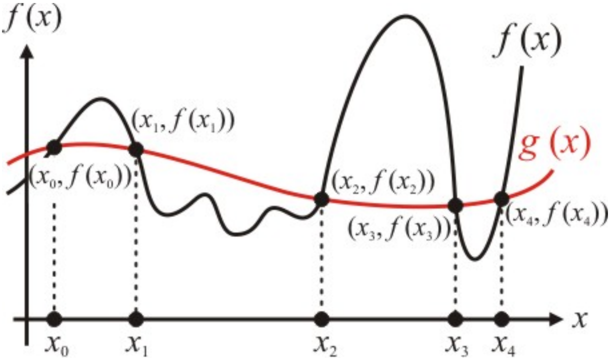

Figura: Interpolação polinomial

Sistema linear

Com os nós formamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} f(x_0) = a_n {x_0}^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ f(x_1) = a_n {x_1}^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \\ \vdots \\ f(x_n) = a_n {x_n}^n + \ldots + a_1 x_n + a_0 \end{cases}$$

Observe que a matriz dos coeficientes tem determinante não nulo, ie, o sistema é possível e determinado.
Este método é conhecido como método de Vandermonde.

Observação

Existem outras formas de encontrar o polinômio interpolador além da resolução de um sistema linear. Todos os procedimentos resultam no mesmo polinômio $p_n(x)$. A escolha de uma ou outra forma depende dos dados que devemos interpolar.

Observação

Existem outras formas de encontrar o polinômio interpolador além da resolução de um sistema linear. Todos os procedimentos resultam no mesmo polinômio $p_n(x)$. A escolha de uma ou outra forma depende dos dados que devemos interpolar.

1. Método de Lagrange (mais teórico)

Observação

Existem outras formas de encontrar o polinômio interpolador além da resolução de um sistema linear. Todos os procedimentos resultam no mesmo polinômio $p_n(x)$. A escolha de uma ou outra forma depende dos dados que devemos interpolar.

1. Método de Lagrange (mais teórico)
2. Método de Newton (mais prático)